10/10/2016

Λήμμα 1 Το Π.Α.Τ. $(E_0)-(y(t_0)=0)$ έχει μοναδική λύση $y=0$.

Απόδειξη Ας είναι y λύση του Π.Α.Τ.

Τότε $y'(t)+p(t)y(t)=0$ $t\in I \Rightarrow e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}y'(t)+e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}p(t)y(t)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}y(t))'=0 \Rightarrow e^{\int_{t_0}^{t}p(s)ds}y(t)=c \Rightarrow y(t)=ce^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}$, $t\in I$

$y(t_0)=0 \Rightarrow 0=c \Rightarrow y(t)=0$, $t\in I$.

Λήμμα 2 Αν y_1, y_2 λύσεις της (E), τότε η $y=y_1-y_2$ είναι λύση της (E_0).

Απόδειξη

Είναι $\left.\begin{array}{l} y_1'+p(t)y_1=q(t) \\ y_2'+p(t)y_2=q(t)\end{array}\right\} \Rightarrow (y_1-y_2)'+p(t)(y_1-y_2)=0 \Rightarrow y'+p(t)y=0, t\in I$

Θεώρημα Υπάρχει ακριβώς μια λύση του Π.Α.Τ. $(E)-(C)$.

Απόδειξη (Για το μοναδικό)

Ας είναι y_1, y_2 λύσεις του $(E)-(C)$ στο I.

Τότε η $y=y_1-y_2$ είναι λύσεις της E_0 με $y(t_0)=y_1(t_0)-y_2(t_0)$.

δηλαδή η y είναι λύση του ομογενούς Π.Α.Τ. $(E_0)-(y(t_0)=0)$, άρα από Λήμμα 1 θα έχω $y_1(t)-y_2(t)=0 \Rightarrow y_1(t)=y_2(t)$ $t\in I$.

Άσκηση (14 iii σελ. 36)

$(3x^2+1)y'-2xy=6x$, $x\in\mathbb{R}$, αφού $(3x^2+1)y'\neq 0$ και όλες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

Λύση

$$y(t)=e^{-\int_0^x \frac{-2s}{3s^2+1}ds}\left[y(0)+\int_0^x \frac{6s}{3s^2+1}e^{\int_0^s -\frac{2t}{3t^2+1}dt}ds\right]$$

$$\int_0^x \frac{2s}{3s^2+1}ds=\frac{1}{3}\int_0^x \frac{2s}{s^2+1/3}ds=\frac{1}{3}\int_0^x \frac{(s^2+1/3)'}{s^2+1/3}ds=\frac{1}{3}\left[\ln(s^2+1/3)\right]_0^x$$

⋮

Άσκηση

Ας είναι y μια λύση της $ay'+by=\kappa e^{-\lambda x}$, $x\in\mathbb{R}$, όπου a,b,κ θετικές σταθερές, $\lambda\geq 0$.

Να αποδείξετε ότι: i) Αν $\lambda=0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\frac{\kappa}{b}$

ii) Αν $\lambda>0$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

Λύση

$y'+\frac{b}{a}y=\frac{\kappa}{a}e^{-\lambda x}$

Είναι $y(x)=e^{-\int_0^x \frac{b}{a}dt}\left[y(0)+\int_0^x \frac{\kappa}{a}e^{-\lambda s}e^{\int_0^s \frac{b}{a}dt}ds\right], x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x)=e^{-\frac{b}{a}x}\left[y(0)+\frac{\kappa}{a}\int_0^x e^{-\lambda s}e^{\frac{b}{a}s}ds\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x)=y(0)e^{-\frac{b}{a}x}+\left(\frac{\kappa}{a}\int_0^x e^{(-\lambda+\frac{b}{a})s}ds\right)e^{-\frac{b}{a}x}=$$

$$=y(0)e^{-\frac{b}{a}x}+\frac{\kappa}{a}\left[\frac{e^{(-\lambda+\frac{b}{a})s}}{-\lambda+\frac{b}{a}}\right]_0^x e^{-\frac{b}{a}x}$$

Για $\lambda\neq\frac{b}{a}$ είναι: $y(x)=y(0)e^{-\frac{b}{a}x}+\frac{\kappa}{a}e^{-\frac{b}{a}x}\frac{1}{-\lambda+\frac{b}{a}}\left[e^{(-\lambda+\frac{b}{a})x}-1\right]\Rightarrow$

$$\Longrightarrow y(x)=y(0)e^{-\frac{b}{a}x}+\frac{\kappa}{-\lambda a+b}\left(e^{-\lambda x}-e^{-\frac{b}{a}x}\right)$$

ii) $\lambda>0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$ αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{b}{a}x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}=0$,

i) $\lambda=0$ τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(y(0)e^{-\frac{b}{a}x}+\frac{\kappa}{-\lambda a+b}\left(e^{-\lambda x}-e^{-\frac{b}{a}x}\right)\right)=0+\frac{\kappa}{b}(1-0)=\frac{\kappa}{b}$

$\lambda=\frac{b}{a}$ τότε $y(x)=y(0)e^{-\frac{b}{a}x}+\frac{\kappa}{a}\int_0^x 1ds\cdot e^{-\frac{b}{a}x}\Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x)=y(0)e^{-\frac{b}{a}x}+\frac{\kappa}{a}xe^{-\frac{b}{a}x}$$

De l'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{y(0)e^{-\frac{b}{a}x}}_{0}+\lim\underbrace{\frac{\kappa}{a}xe^{-\frac{b}{a}x}}_{0}=0$$

αφού $\frac{b}{a}>0$

Άσκηση 21 (Άλυτων)

$y' + p(x)y = q(x)$, $p, q \in C[0,\infty)$

Υποθέτουμε ότι $\exists x_0 \geq 0$ και $\mu > 0$: $\mu \leq p(x), \forall x \geq x_0$ και $\lim_{+\infty} q(x) = 0$. Να αποδείξετε ότι όλες οι λύσεις τείνουν στο 0 για $x \to +\infty$

(Ε. → Κάθε λύση της $y' + y\log\left(\frac{5}{2} + \sin x\right) = \frac{\cos x}{(x+1)^2}$ τείνει στο 0 για $x \to +\infty$).

Λύση

Για $x \geq 0$ έχουμε:

$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}\left[y(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = y(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} + e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds$

Είναι $\mu \leq p(x), x \geq x_0$

$\mu(x - x_0) = \int_{x_0}^{x} \mu\, ds \leq \int_{x_0}^{x} p(s)ds \Rightarrow -\int_{x_0}^{x} p(s)ds \leq -\mu(x - x_0) \Rightarrow e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \leq e^{-\mu(x-x_0)}$

$0 \leq \lim_{x\to+\infty} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \leq \lim_{x\to+\infty} e^{-\mu(x-x_0)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} y(x_0) e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} = 0$

Θα αποδείξω ότι $\lim_{+\infty} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds = 0$.

Είναι $\left| e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} q(s) e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds \right| \leq e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} \int_{x_0}^{x} |q(s)| e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\lim_{+\infty} \underbrace{e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds}}_{\downarrow 0} \underbrace{\int_{x_0}^{x} |q(s)| e^{\int_{x_0}^{s} p(u)du} ds}_{\text{Αν είναι φραγμένη, τότε}} = 0$

Επειδή $\lim_{+\infty} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} = 0$, διακρίνω δυο περιπτώσεις ($g(x)$ με $g'(x) = |q(x)| e^{\int_{x_0}^{x} p(u)du} \geq 0$

δηλαδή $g(x) \nearrow \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$)

i) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} g(x) = 0 \cdot \ell = 0$

ii) $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ τότε $\lim_{x\to+\infty} e^{-\int_{x_0}^{x} p(s)ds} g(x) = \lim_{+\infty} \frac{g(x)}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}} = \lim \frac{g'(x)}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} p(x)} =$

$= \lim_{+\infty} \frac{|q(x)| e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}}{e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds} p(x)} \overset{(*)}{=} 0$

(*) $0 \le \frac{|q(x)|}{p(x)} \le \frac{|q(x)|}{\mu} = \frac{1}{\mu}|q(x)| \to 0$ $\left(\lim_{+\infty} q(x)=0 \Rightarrow \lim_{+\infty} |q(x)|=0\right)$

Εφαρμογή

Έχουμε $p(x)=\log\left(\frac{5}{2}+\sin x\right), x\ge 0$, $q(x)=\frac{\cos x}{(x+1)^2}, x\ge 0$

$\frac{5}{2}+\sin x \ge \frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$

$p(x)=\log\left(\frac{5}{2}+\sin x\right)\ge \log\left(3/2\right)=\mu>0, x\ge 0$

Επίσης $\lim_{+\infty} q(x)=\lim_{+\infty}\frac{\cos x}{(x+1)^2}=0$ $\left(0\le |q(x)|=\frac{|\cos x|}{(x+1)^2}\le \frac{1}{(x+1)^2}\xrightarrow{x\to+\infty} 0\right)$

Δηλαδή πληρούνται οι υποθέσεις της άσκησης επομένως για κάθε λύση της εξίσωσης θα είναι $\lim_{+\infty} y(x)=0$

Αν δεν είχαμε μια μη σταθερή συνάρτηση, θα ισχύει το ελάχιστο της παράστασης να είναι θετικό.

A-16, A-27 (i) όπου m μια αρνητική σταθερά (Σπίτι)